ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES SP

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserves des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations et objectif.

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$

on se propose d'étudier, dans la question B.2, son développement en série entière sur [-1,1] et d'exploiter ce développement pour calculer, dans les questions B.3, B.4 et B.5, des valeurs numériques de f(x).

La partie A est consacrée à l'étude de la suite (a_n) définie par :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \; a_n = \frac{1}{2}\frac{3}{4} \ldots \frac{2n-1}{2n}.$$

qui sera utilisée ensuite dans la partie B.

A. Préliminaire. Pour tout entier naturel p on pose : $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \, dx$

1°. Calculer I_0 et I_1.

2°. Montrer que la suite (I) est décroissante.

3°. Si p est entier naturel exprimer I_{p+2} en fonction de I_p.

4°. Exprimer I_{2n}, I_{2n+1} et I_{2n+2} en fonction de n et de a_n.

5°. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

et en déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$.

B. Etude de la fonction f.

1°. a. Montrer que l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$ est bien définie pour tout nombre réel x et que la fonction $f : x \longmapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b. Etudier la parité de la fonction f.

c. Soit h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$

comparer, pour x réel non nul, h(x) et $h\left(\frac{1}{x}\right)$

et en déduire une relation entre f(x), f(1) et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout réel x non nul.

A SUIVRE

d. Déduire des questions précédentes qu'il suffit de connaître les valeurs prises par la fonction f sur le segment [0,1] pour pouvoir calculer la valeur de f(x) pour un réel x quelconque.

e. Montrer que la fonction f admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et exprimer cette limite à l'aide du nombre f(1).

2°. Développement de f sur [-1,1].

a. Montrer que sur l'intervalle]-1,1[, la fonction f est développable en série entière selon la formule :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n x^{4n+1}}{4n+1}$$

où a_n est le n-ième terme de la suite (a_n) étudiée dans la partie A.

b. Montrer que la série précédente est convergente pour x=1 puis pour x=-1.

c. On suppose à présent que x appartient au segment [0,1] et on pose, pour tout entier naturel p :

$$R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n x^{4n+1}}{4n+1}$$

Montrer que, pour tout entier naturel p et tout réel x de [0,1] on a la majoration : $\left|R_p(x)\right| \leq \frac{a_{p+1} x^{4p+5}}{4p+5}$

d. On pose, pour tout entier naturel p : $S_p(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n x^{4n+1}}{4n+1}$

Déduire, de ce qui précéde, une majoration de $\left|f(x)-S_p(x)\right|$ lorsque x est dans [0,1[.

Montrer que cette majoration est encore valable pour x=1 (On pourra utiliser un argument de continuité).
En déduire que f est développable en série entière sur [-1,1]

3°. Valeurs approchées de f. Représentation graphique.

Pour tout entier naturel n et tout réel $x \in [0,1]$ on pose : $b_n(x) = (-1)^n a_n x^{4n+1}$

a. Exprimer $b_{n+1}(x)$ en fonction de $b_n(x)$ de n et de x.

b. Utiliser ce résultat et la majoration précedente de $\left|f(x)-S_p(x)\right|$ pour écrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de f(x), x étant un réel donné de [0,1], avec une erreur inférieure au réel strictement positif donné ϵ.

c. En utilisant une calculatrice et l'algorithme précédent, calculer des valeurs approchées , à 10^{-3} près et 10^{-2} près respectivement, de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et de f(1).
(On ne tiendra pas compte des erreurs de calcul dues à la machine pour le calcul du nombre $S_p(x)$).

Tournez la page S.V.P.

d. Dessiner, à l'aide des renseignements déjà obtenus, la représentation graphique de la fonction f lorsque la variable x décrit R.

4°. Evaluation du nombre de termes à calculer pour x=1.

a. En utilisant la relation (1) de la partie A et les majorations précédentes montrer que, pour tout entier naturel non nul p :

$$\left|f(1)-S_p(1)\right| \leq \frac{1}{4\sqrt{\pi}\ (p+1)^{\frac{3}{2}}}$$

b. En déduire une valeur de p pour que $\left|f(1)-S_p(1)\right|$ soit inférieur à 10^{-6} ?

5°. Evaluation du nombre de termes à calculer pour x∈]0,1[.

Pour tout entier naturel non nul p et tout réel x de l'intervalle]0,1[on pose : $E_p(x) = \dfrac{x^{4p+5}}{4p\sqrt{\pi p}}$

a. En utilisant la relation (1) de la partie A et les majorations précédentes montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout réel x de l'intervalle]0,1[, on a : $\left|f(x)-S_p(x)\right| \leq E_p(x)$

b. Montrer que, ε étant un réel strictement positif donné :

$$E_p(x) < \varepsilon \iff 0 < \phi(p)$$

où ϕ est la fonction de la variable u définie par :

$$\phi(u) = \frac{3}{2}\ln(u) - (4u+5)\ln(x) + \ln(4\varepsilon\sqrt{\pi})$$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

Soit : $\mathcal{A} = \{ n\in\mathbb{N}^* ; 0 < \phi(n) \}$. Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas vide et admet un plus petit élément (qui sera notre évaluation).

c. Ecrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit élément α de $\mathcal{A}$, les réels x et ε étant donnés.

Indication : Soit $u_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\ln(4\varepsilon\sqrt{\pi})}{\ln(x)} - 5 \right)$.

. Comment peut-on choisir α lorsque $u_0 \leq 1$?

. Montrer que si $1 < u_0$ alors $0 < \phi(u_0)$ et en déduire que la partie entière de $1 + u_0$ est alors un élément de $\mathcal{A}$ et procéder ensuite par dichotomie.

d. En déduire un entier p pour obtenir une valeur approchée de $f(\frac{1}{2})$ avec une erreur inférieure à 10^{-6}.

FIN